#1 원순열

◈ 원순열

- 서로 다른 n개의 원소를 원형으로 배열하는 순열
- $(n-1)!$

#2 중복순열

◈ 중복순열

- 서로 다른 n개의 원소에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 순열
- ${}_n\Pi_r = n^r$ (n, r은 자연수)

#3 같은 것이 있는 순열

◈ 같은 것이 있는 순열

- n개 가운데 서로 같은 것이 있는 순열
- n개 가운데 서로 같은 것이 각각 $p, q, \cdot\cdot\cdot, s$개씩 있을 때, 이들을 모두 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{n!}{p!q!\cdot\cdot\cdot s!}$$

$(p+q+\cdot\cdot\cdot+s=n)$

#4 중복조합

◈ 중복조합

- 서로 다른 n개의 원소에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 조합
- ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$

$$= \frac{\{r+(n-1)\}!}{r!(n-1)!}$$

#5 이항정리

◈ 이항정리

- $(a+b)^n$의 전개식을 구하는 것
- $(a+b)^n$

$$= {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + \cdot\cdot\cdot + {}_nC_nb^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_ra^{n-r}b^r$$

#6 이항정리의 활용

◈ 이항정리의 활용

- ${}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdot\cdot\cdot + {}_nC_n = 2^n$

◈ 파스탈의 삼각형

- ${}_{n+1}C_{r+1} = {}_nC_r + {}_nC_{r+1}$

$(1 \leq r \leq n-1)$

#7 조합

◈ 조합

- ${}_{n+1}C_{r+1} = {}_nC_r + {}_nC_{r+1}$

$(1 \leq r \leq n-1)$

#8 시행과 사건

◈ 시행

- 같은 조건에서 여러번 반복할 수 있으며, 그 결과가 우연에 의해서 정해지는 실험이나 관찰

  ex)동전 던지기, 주사위 던지기 등

  ※ 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 그 시행의 표본공간이라 한다.

◈ 사건

- 시행의 결과로 일어나는 것

  ※ 사건은 표본공간의 부분집합

#9 배반사건과 여사건

◈ 배반사건

- 두 사건 A, B에 대하여 A, B중 어느 한 사건이 일어나면 다른 사건은 일어나지 않을 때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이라고 한다.
- $A \cap B = \varnothing$

◈ 여사건

- 어떤 사건 A에 대하여 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라고 한다.
- A^c

#10 확률

◈ 확률

- 어떤 시행에서 사건 A가 어느 정도로 일어날 것인지를 수로 나타낸 것을 사건 A가 일어날 확률이라 한다.
- $P(A)$

◈ 수학적 확률

- 어떤 시행의 표본공간 S에서 하나의 원소로만 이루어진 사건이 모두 같은 정도로 일어날 것으로 기대될 때

  $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$를 사건 A가 일어날 수학적 확률이라고 한다.

◈ 통계적 확률

- 같은 시행을 n번 반복하였을 때 사건 A가 일어나는 횟수를 r_n이라고 하자. 이때 시행 횟수 n이 커짐에 따라 상대도수 $\dfrac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워지면 p를 사건 A가 일어날 통계적 확률이라고 한다.

#11 확률의 기본 성질

◈ 확률의 기본 성질

- 임의의 사건 A에 대하여

  $0 \leq P(A) \leq 1$
- 사건 A가 반드시 일어날 때,

  $P(A) = 1$
- 사건 A가 절대로 일어나지 않을 때,

  $P(A) = 0$

#12 확률의 덧셈정리

◈ 확률의 덧셈정리

- 두 사건 A, B에 대하여

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면,

  즉 $A \cap B = \varnothing$ 이면

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

#13 여사건의 확률

◈ 여사건의 확률

- 임의의 사건 A에 대하여

  $P(A^c) = 1 - P(A)$

#14 조건부 확률

◈ 조건부 확률

- 어떤 시행에서 사건 A가 일어난 것을 전제할 때, 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부 확률이라 한다.
- $P(B|A)$
- $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

#15 확률의 곱셈정리

◈ 확률의 곱셈정리

- 두 사건 A, B가 함께 일어날 확률
- $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$

#16 독립사건과 종속사건

◈ 독립사건

- 두 사건 A, B에 대하여

  $P(B|A) = P(A)$일 때, A와 B는 서로 독립 또는 독립사건이라고 한다.

- 두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

◈ 종속사건

- 두 사건 A, B가 서로 독립이 아닐 때, A와 B는 서로 종속 또는 종속사건

#17 독립시행의 확률

◈ 독립시행

- 매회 같은 조건에서 어떤 시행이 반복되면 각 회의 시행은 그 이전의 시행의 결과에 영향을 받지 않는다. 이러한 시행을 독립시행이라고 한다.

◈ 독립시행의 확률

- 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 p, 그 여사건이 일어날 확률을 q라고 하면, 이 시행을 n번 반복한 독립시행에서 사건 A가 r번 일어날 확률은

  ${}_nC_r p^r q^{n-r} \; (r = 0, 1, 2, \cdots, n)$

#18 확률변수와 확률분포

◈ 확률변수

- 어떤 시행에서 표본공간의 각 원소에 대하여 하나의 수를 대응시키는 함수를 확률변수라고 한다.
- 보통 대문자로 나타낸다.
- 확률변수가 가지는 값은 소문자로 나타낸다.

※ 확률변수 X가 가지는 값들을 셀 수 있을 때, 이 확률변수 X를 이산확률변수

◈ 이산확률변수

- 확률변수 X가 가지는 값들을 셀 수 있을 때, 이 확률변수 X를 이산확률변수라고 한다.
- X가 어떤 값 x를 가질 확률은 $P(X=x)$와 같이 나타낸다.

◈ 확률분포

- 이산확률변수 X가 x_i $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$를 가질 확률을 각각 $P(X=x_i)=p_i$라고 할 때, $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$과 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ 사이의 대응 관계를 확률변수 X의 확률분포라 하고 $P(X=x_i)$를 이산확률변수 X의 확률질량함수라고 한다.

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

※ 확률질량함수 $P(X=x_i)=p_i$ $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$에 대하여

ㄱ. $0 \le p_i \le 1$

ㄴ. $p_1+p_2+p_3+\cdots p_n=1$

#19 이산확률변수의 기댓값

◈ 이산확률변수의 기댓값

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

- 확률변수 X의 값과 그 확률의 곱의 총합
- 기댓값, 평균, $E(X)$
- $E(X)=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots+x_np_n$

$$=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

#20 이산확률변수의 분산과 표준편차

◈ 분산

- 확률변수 X의 평균을 $E(X)=m$이라 할 때, 확률변수 $(X-m)^2$의 평균
- $V(X)=E\left((X-m)^2\right)$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$$

$$=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

◈ 표준편차

- $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

#21 확률변수 $aX+b$의 평균 분산, 표준편차

◈ 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 X와 상수 a, b에 대하여

- 평균 $E(aX+b)=aE(X)+b$
- 분산 $V(aX+b)=a^2V(X)$
- 표준편차 $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(x)$

#22 이항분포

◈ 이항분포

- 한번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라고 할 때의 확률분포
- $B(n, p)$

#23 이항분포의 평균, 분산, 표준편차

◈ 이항분포의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따를 때

- 평균 $E(X) = np$
- 분산 $V(X) = np(1-p)$
- 표준편차 $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

#24 큰수의 법칙

◈ 큰수의 법칙

- 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률을 p라 하고, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 할 때, 임의의 양수 h에 대하여 n값이 한없이 커지면 $P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < h\right)$의 값은 1에 가까워진다.

※ 시행의 횟수가 충분히 클 때 통계적 확률은 수학적 확률에 가까워지므로 사건 A의 상대도수 $\frac{X}{n}$를 사건 A가 일어날 확률의 어림값으로 사용할 수 있다.

#25 연속확률변수

◈ 연속확률변수

- 어떤 범위의 임의의 실수 값을 갖는 확률변수

◈ 확률밀도함수

- 연속확률변수 X가 $a \le X \le b$인 범위 안의 임의의 값을 가질 수 있고, 이 범위에서 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족하면 $f(x)$를 X의 확률밀도함수라 한다.

※ 확률밀도함수 $f(x)$

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge 0$

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1

ㄷ. $P(\alpha \le X \le \beta)\,(a \le \alpha \le \beta \le b)$는 곡선 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 부분의 넓이

#26 정규분포

◈ 정규분포

- 연속확률변수 X가 모든 실수 값을 취하고 그 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

(m은 상수, σ는 양의 상수) 으로 주어질 때 확률변수 X는 정규분포 $N(m,\,\sigma^2)$을 따른다고 하며 $f(x)$의 그래프를 정규분포곡선이라 한다.

◈ 정규분포의 평균과 분산

확률변수 X가 정규분포 $N(m,\,\sigma^2)$을 따를 때

- 확률밀도함수

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

- 평균 $E(X)=m$
- 분산 $V(X)=\sigma^2$

#27 정규분포곡선의 성질

◈ 정규분포곡선의 성질

- 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양
- $x=m$일 때 최댓값 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$을
  가지며 x의 값이 m에서 멀어질수록
  $f(x)$의 값은 0에 가까워진다.
  즉, x축을 점근선으로 한다.
- σ의 값이 일정하고 m의 값이
  달라지면 곡선의 모양은 같고 대칭축만
  바뀐다.
- m의 값이 일정할 때, σ의 값이
  커질수록 곡선의 모양은 낮아지며
  폭은 넓어진다.
- 이 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

#28 표준정규분포

◈ 표준정규분포

- 평균이 0, 분산이 1인 정규분포
- $N(0, 1)$
- 확률변수 Z의 확률밀도함수는

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Z^2}{2}}$$

#29 정규분포의 표준화

◈ 정규분포의 표준화

- 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는
  확률변수 X를
  표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르는
  확률변수 Z로 바꾸는 것
- $Z=\frac{X-m}{\sigma}$

#30 이항분포와 정규분포

◈ 이항분포와 정규분포의 관계

- 확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를
  따를 때, n이 충분히 크면 X는
  근사적으로
  정규분포 $N(np, np(1-p))$를
  따른다.

#31 모집단과 표본

◈ 전수조사

- 조사 대상 전체를 조사하는 것

◈ 표본조사

- 조사 대상 전체의 성질을 알기 위해
  전체 대신 그 일부만을 조사하는 것

◈ 모집단

- 표본조사에서 조사의 대상이 되는 자료
  전체

◈ 표본

- 모집단에서 조사하기 위하여 뽑은 자료

◈ 임의추출

- 모집단의 각 자료가 같은 확률로
  독립적으로 추출되도록 뽑는 것

#32 모평균, 모분산, 모표준편차

◈ 모평균, 모분산, 모표준편차

- 모집단에서 조사의 대상이 되는 특성을
  나타내는 확률변수를 X라 할 때
  X의 평균, 분산, 표준편차를 각각
  모평균, 모분산, 모표준편차라 한다.

#33 표본평균, 표본분산, 표본표준편차

◈ 표본평균, 표본분산, 표본표준편차

어떤 모집단에서 크기가 n인 표본 $X_1, X_2, \cdots, X_n$을 임의추출 하였을 때

- 표본평균 $\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$
- 표본분산 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$
- 표본표준편차

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}$$

#34 표본평균 $\overline{X}$의 분포

◈ 표본평균 $\overline{X}$의 분포

모평균이 m이고 모분산이 σ^2인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출 할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 분포는

- $E\left(\overline{X}\right)=m$
- $V\left(\overline{X}\right)=\dfrac{\sigma^2}{n}$
- $\sigma\left(\overline{X}\right)=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- 모집단의 분포가 정규분포 $N\left(m, \sigma^2\right)$ 이면 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.
- 모집단의 분포가 정규분포가 아니더라도 표본의 크기 n이 충분히 크면 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $N\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

#35 모평균의 추정

◈ 추정

- 모집단에서 임의추출한 표본의 평균과 표준편차 등을 이용하여 모집단의 평균이나 표준편차와 같은 미지의 값을 추측하는 것

◈ 신뢰도

- 어떠한 값이 알맞은 모평균이라고 믿을 수 있는 정도

◈ 모평균의 추정

모표준편차가 σ, 크기가 n인 표본의 표본평균이 $\overline{X}$일 때, 모평균 m의 신뢰구간은

- 신뢰도 95%

$$\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- 신뢰도 99%

$$\overline{X}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$